

Es 1 [10] (i) Si usi il metodo dei residui per calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

(ii) Si usi il metodo dei residui per calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx$.

Es 2 [8 pt] (i) Si definisca la funzione $\text{Arg } z$, argomento principale di z , e si dimostri che è una funzione armonica.

(ii) Si determini una trasformazione conforme da $D := \{z : |z| < 1, 0 < \text{Arg } z < \pi/4\}$ sulla striscia $\{w : |\text{Im } w| < 1\}$.

Es 3 [8 pt] (i) Discutere le singolarità in $\mathbb{C}^*$ della funzione $f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}$.

(ii) Determinare la serie di Laurent di f nel dominio $\{0 < |z| < 1\}$.

(iii) Calcolare il residuo di f in $z = 0$.

Es 4 [4 pt] (i) Si determini il numero di soluzioni di $z^7 + 5z^3 + 2z + 9 = 0$ all'interno dell'anello $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

(ii) (facoltativo¹) Stesso problema con 8 al posto di 9.

¹Da discutere, eventualmente, solo dopo la risoluzione degli altri quesiti.